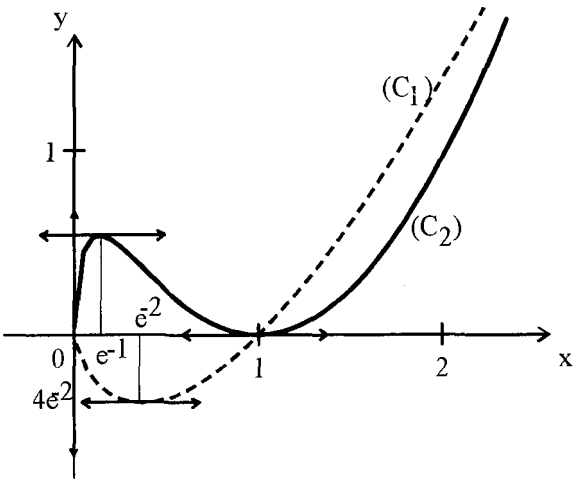
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(\text{Log}x)^2\right] = +\infty \Rightarrow C_2$ (la courbe de f_2) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

★ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_2(x)}{x} = +\infty \Rightarrow C_2$ admet une demi-tangente verticale en $O(0,0)$

★ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f_1(x)}{x} = -\infty \Rightarrow C_1$ admet une demi-tangente verticale en $O(0,0)$



3/a- $\forall n \in \text{IN}^*; u_{n+1} - u_n = \int_1^e \left[x(\text{Log}x)^{n+1} - x(\text{Log}x)^n\right]dx$

$= \int_1^e x(\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1]dx$

Pour tout $x \in [1;e]; 0 \le \text{Log}x \le \text{Log}e = 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1;e]; \text{Log}x - 1 \le 0$

De plus $\forall x \in [1;e]; x(\text{Log}x)^n \ge 0$

Ainsi $\forall x \in [1;e]; x(\text{Log}x)^n(\text{Log}x - 1) \le 0$

D'où $\int_1^e x(\text{Log}x)^n[\text{Log}x - 1]dx \le 0$.

Par suite $\forall n \in \text{IN}^*; u_{n+1} - u_n \le 0$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est décroissante sur IN^*.

b- Pour tout $n \in \text{IN}^*$ on a $\forall x \in [1;e]; x(\text{Log}x)^n \ge 0$

D'où $\forall n \in \text{IN}^*; u_n = \int_1^e x(\text{Log}x)^n dx \ge 0$

c- $n \in \text{IN}^*; u_{n+1} = \int_1^e x(\text{Log}x)^{n+1}dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = x & \rightarrowtail & u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v(x) = (\text{Log}x)^{n+1} & \rightarrowtail & v'(x) = \dfrac{n+1}{x}(\text{Log}x)^n \end{array}\right)$$